5. PROGRAMARE NELINIARĂ

Multe aplicații practice din domeniul energetic conduc la probleme de optimizare care nu se încadrează în categoriile problemelor de programare liniară sau dinamică. Aceste probleme includ funcții neliniare (funcția obiectiv sau restricțiile) şi nu au caracter de proces secvențial de decizie.

Soluțiile acestor probleme nu pot fi obținute aplicând algoritmul simplex sau algoritmul programării dinamice.

Astfel, dacă o parte dintre restricții sunt funcții neliniare, domeniul soluțiilor admisibile nu mai este un poliedru convex în $\mathbb{R}^n$ (deci nu mai are un număr finit de vârfuri care să fie parcurse succesiv până la găsirea soluției optime). Dacă toate restricțiile sunt funcții liniare dar funcția obiectiv este neliniară, soluția optimă nu mai este obligatoriu unul dintre vârfurile simplexului, ci se poate găsi şi pe una dintre fețele acestuia.

Rezolvarea problemelor de programare neliniară este dificilă datorită imposibilității realizării distincției între extremele locale şi extremul global, folosind numai informații locale. Astfel considerând o problemă de minimizare cu o singură variabilă, funcția criteriu poate avea, pe domeniul soluțiilor admisibile, mai multe minime.

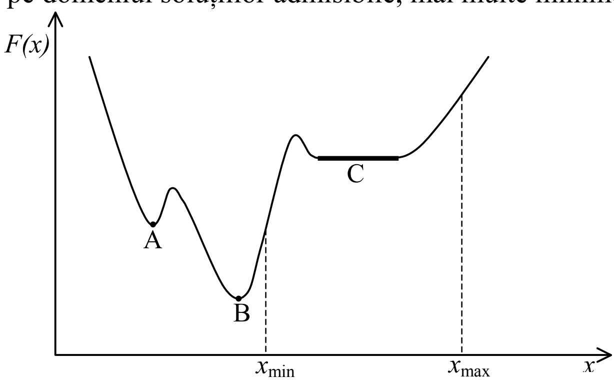

Fig.?.1 *Puncte de minim pentru o funcție*

A – punct de minim local simplu
B – punct de minim global
C – minim local multiplu

După cum se cunoaşte, condiţiile ca punctul $(x^*, f(x^*))$ să fie punct de minim pentru funcţia f sunt $f'(x^*)=0$, $f''(x^*)\geq 0$. Aceste condiţii sunt verificate în punctele A, B şi pe segmentul C dar minimul global al funcţiei este B.

O altă dificultate o constituie formularea unei condiţii de extrem în cazul în care soluţia problemei se găseşte pe frontiera domeniului soluţiilor admisibile.

Pentru exemplul considerat, dacă se consideră că restricţiile problemei conduc la un domeniu al soluţiilor admisibile sub forma intervalului $[x_{min}, x_{max}]$ soluţia optimă este x_{min}. În punctul de minim $(x_{min}, f(x_{min}))$ nu sunt verificate condiţiile precizate anterior deoarece derivata de ordinul întâi este nenulă.

Este posibil ca soluţia optimă a problemei de programare neliniară să nu se mai găsească pe frontiera domeniului soluţiilor admisibile ci în interiorul acesteia.

Din cauza acestor dificultăţi nu a fost încă pusă la punct o metodă eficientă de rezolvare a problemelor de programare neliniară sub forma cea mai generală (fără a se pune condiţii suplimentare funcţiei obiectiv sau restricţiilor problemei).

Există o clasă particulară de probleme de optimizare neliniară pentru care s-au elaborat metode convenabile şi fundamentate teoretic care permit găsirea soluţiei optime. În această categorie se încadrează problemele de programare convexă.

În programarea neliniară pot fi puse în evidenţa următoarele clase de probleme:

-probleme de optimizare fără restricţii la care funcţia obiectiv este neliniară iar domeniul soluţiilor admisibile este $\mathbb{R}^n$

-probleme de optimizare cu funcţia obiectiv neliniară şi restricţii liniare (cu o subclasă importantă: probleme de programare pătratică – la care funcţia obiectiv este un polinom de gradul doi);

- probleme de programare convexă
- probleme de programare separabile (la care funcţia obiectiv şi restricţiile sunt sume de funcţii, fiecare depinzând de câte o variabilă)
- probleme de programare neconvexă.

5.1 Condiții de minim

Deoarece toate mărimile de stare ale instalațiilor energetice, care sunt variabile ale problemelor de optimizare, sunt numere reale, toate definițiile ulterioare referitoare la variabilele funcțiilor care apar în problemele de optimizare neliniară se vor limita la spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$.

O problemă de programare neliniară poate fi definită în felul următor: fie $F:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$; se cere să se determine punctul x^0 din D care verifică anumite restricții (sub forma unor ecuații sau inecuații) în care funcția obiectiv are valoarea cea mai mică. Matematic o problemă de optimizare neliniară poate fi prezentată ca:

$$\begin{aligned} &\min F(x) \\ &g_i(x) \le 0 \quad i = 1,\dots,m \\ &x_i \ge 0 \quad j = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{5.1}$$

unde $F(x)$ şi/sau o parte dintre restricțiile $g_i(x)$ sunt funcții neliniare. Nu s-a mai precizat în formularea matematică că punctul x trebuie să fie din D, această condiție fiind subînțeleasă.

Foarte puține probleme de optimizare neliniară pot fi rezolvate direct, prin rezolvarea unei ecuații sau a unui sistem de ecuații (liniare sau neliniare). În marea majoritate a situațiilor găsirea soluției optime este un proces iterativ care urmăreşte ca, pornind de la o soluție admisibilă inițială (aleasă în general aleator), să permită generarea unui şir de puncte, toate soluții admisibile, care au proprietatea că prin trecerea de la un punct la următorul funcția obiectiv scade.

În acest algoritm este foarte important să se dispună de anumite condiții care să permită ca, odată găsit un punct din acest şir, să se ia decizia de oprire a procesului (la atingerea minimului funcției obiectiv) sau de trecere la următorul punct.

Aceste condiții permit recunoaşterea punctului de minim a funcției obiectiv fără a fi nevoie să se compare valoarea acesteia în punctul respectiv cu valorile în punctele vecine. Condițiile care, odată îndeplinite, garantează caracterul de soluție optimă pentru punctul în care acestea au fost îndeplinite poartă numele de condiții de optimalitate.

5.1.1 Condiții de optimalitate pentru optimizarea fără restricții

În acest caz problema de optimizare are forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x) \tag{5.2}$$

iar condițiile de optimalitate sunt reprezentate de următoarele teoreme.

Tr. (condiții necesare de ordinul 1) Fie *X* o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi F: X→ $\mathbb{R}$ o funcție reală definită pe *X*. Dacă x_0 este o soluție optimă a problemei de optimizare neliniară şi *F* este diferențiabilă în x_0, atunci:

$$\nabla F(x_0) = 0 \tag{5.3}$$

Tr. (condiții de ordinul 2) Fie *X* o submulțime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi F: X→ $\mathbb{R}$ o funcție reală definită pe *X*. Atunci:

a. Dacă x_0 este soluția optimă a problemei de optimizare neliniară şi *F* este de două ori diferențiabilă în x_0, atunci gradientul şi matricea hessian a funcției obiectiv verifică următoarele condiții:

$$\begin{array}{l} \nabla F(x_0) = 0 \\ \nabla^2 F(x_0) \text{ pozitiv semidefinită} \end{array} \tag{5.4}$$

b. Dacă x_0 este şi *F* este de două ori diferențiabilă în x_0, şi:

$$\begin{array}{l} \nabla F(x_0) = 0 \\ \nabla^2 F(x_0) \text{ pozitiv definită} \end{array} \tag{5.5}$$

atunci x_0 este soluție optimă a problemei de optimizare neliniară.

După cum se observă, condițiile de minim au o formă simplă în cazul problemelor de programare fără restricții ale căror funcții obiectiv sunt diferențiabile (o dată sau de două ori). Acestea au avantajul caracterului local în sensul că pentru verificarea lor este nevoie doar de valori calculate în punctul respectiv x_0.

Foarte importantă în acest caz este condiția necesară ca gradientul funcției obiectiv să fie nul în punctul curent, cunoscută sub numele de ecuația lui Euler.

Îndeplinirea acestei condiții nu garantează găsirea soluției optime. În acest scop ea trebuie completată cu condiția ca matricea hessian să fie pozitiv definită sau, dacă aceasta nu poate fi verificată, cu un studiu local al valorii funcției obiectiv (analiza modului în care se modifică funcția obiectiv într-o vecinătate a punctului curent). În acest fel se determină dacă punctul în care gradientul este nul este un punct de minim sau un punct de maxim, respectiv punct şa.

Dacă problema are şi restricții care restrâng domeniul soluțiilor admisibile poate fi formulată următoarea teoremă:

Tr. Fie funcția $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi o mulțime $S \subset \mathbb{R}^n$ convexă şi închisă. Atunci minimul lui F pe S este punctul x_0 pentru care $-\nabla F(x_0) \in [N(S, x_0)]$ unde $N(S, x_0) = \{s | s \in \mathbb{R}^n, \langle s, c - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall \quad c \in S\}$ este mulțimea direcțiilor normale la S în x_0

În cazul problemelor convexe pentru care $F(x)$ este o funcție derivabilă şi convexă atunci teorema anterioară conduce la: x_0 este soluție a problemei de optimizare dacă şi numai dacă este verificată inegalitatea:

$$\langle \nabla F(x_0), v - x_0 \rangle \geq 0 \tag{5.10}$$

oricare ar fi soluția admisibilă v.